**3.** המרובע ABCD חסום במעגל שמרכזו O, ונתון כי O אינו נמצא על אף אלכסון של המרובע. המעגל החוסם את המשולש AOC עובר דרך אמצע האלכסון BD. הוכיחו כי המעגל החוסם את המשולש BOD עובר דרך אמצע האלכסון AC.

**פתרון.** המשיקים למעגל בנקודות A ו-C נפגשים בנקודה P (לו המשיקים היו מקבילים, O היה על AC). נתבונן בישרים שעוברים דרך P וחותכים את המעגל. כל ישר כזה יוצר מיתר, אנו נראה שאמצעי המיתרים האלה יוצרים קשת מעגלית, שקצותיה A ו-C ושהיא עוברת גם דרך O.

אכן, אם PXY ישר, כאשר X ו-Y נקודות שונות על המעגל, ואמצע של XY הוא M, אז M הוא עקב האנך מ-O ל-XY, ולכן PMO זווית ישר, לכן M נמצא על המעגל שקוטרו PO. אם XY עובר דרך O, אז M מתלכד עם O; אם הישר XY מתקרב ל-A, אז M מתקרב ל-A, ואם הישר XY מתקרב ל-C, אז M מתקרב ל-C.

לכל נקודה M בתוך העיגול שהיא לא O יש מיתר יחיד דרך M שהאמצע שלו הוא M. מצד שני הוכחנו שאם M נמצא על המעגל AOC אז הישר MO נותן מיתר כזה בדיוק. אמצע BD (שהוא לא O) נמצא על המעגל AOC, לכן המשך BD עובר דרך P.

באופן דומה, עם נסמן ב-Q את נקודת מפגש המשיקים ב-D וב-B אז הדבר שצריך להוכיח בשאלה שקול לכך ש-AC עובר דרך Q.

נסמן ב-K את האמצע AC, וב-L את האמצע BD. המשולשים OKA ו-OAP דומים – הזווית O משותפת וזווית נוספת ישרה בכל משולש. לכן  ולכן , כאשר  הוא רדיוס המעגל. באופן דומה גם  ולכן .

כלומר המשולשים OLP ו-OKQ דומים (יש זווית משותפת ב-O ויחס שווה).

כאשר הוכחנו, שהמשך BD עובר דרך P, בעצם הוכחנו שהזווית OKP. ישרה. כאשר אנו רוצים להוכיח כי Q נמצא על המשך AC, בעצם רוצים להוכיח שהזווית OLP ישרה. אבל הטענות שקולות כי המשולשים דומים.