**7.** א. נתון פנס ו- סוללות (). ידוע שכמות הסוללות החדשות גדולה ב-1 מכמות הסוללות הריקות, אך לא ידוע אילו סוללות הן חדשות ואילו ריקות. ניתן להכניס שתי סוללות לתוך הפנס והוא יאיר אך ורק אם שתיהן חדשות. כמה נסיונות נדרשים על מנת להפעיל את הפנס בוודאות?

ב. אותה השאלה, אך כאשר יש  סוללות (), וידוע שיש אותה כמות של סוללות חדשות וסוללות ריקות.

תשובות. א. . ב. .

**פתרון. א.** בבדיקה ראשונה ניקח סוללות 1 ו-2, אחר-כך סוללות 3 ו-4, סוללות 5 ו-6, ..., עד סוללות  ו-. בשתי בדיקות אחרונות נשתמש בסוללה : פעם אחד יחד עם , ופעם שנייה יחד עם סוללה .

כך ביצענו  בדיקות, ואנו רוצים לטעון שבאחת הבדיקות הפנס חייב להידלק. אכן, אם בכל הבדיקות הפנס לא דלק, אז יש סוללה לא תקינה בכל אחד מהזוגות (1,2) , (3,4) , . . . ,  ובנוסף שתי סוללות לא תקינות בשלישייה . זה כבר נותן  סוללות לא תקינות בניגוד להנחה שיש רק  סוללות לא תקינות.

ראינו דוגמה לשיטה שמדליקה פנס תוך  בדיקות, נשאר להראות שאין שיטה יותר יעילה.

נניח שמישהו מציג שיטה שמסתפקת ב- בדיקות או פחות. מטרתנו היא להוכיח שיתכן שאף פנס לא נדלק במהלך הבדיקות. (ניתן להניח שאסטרטגיה לא מסתמכת על תוצאות הבדיקות, כי אנו מתעניינים רק במקרה שהפנס לא נדלק באף בדיקה.) נבחר סוללה אחת מכל בדיקה, יכול להיות שבוחרים אותה סוללה יותר מפעם אחת. בכל מקרה, זה לא יותר מ- סוללות בסה"כ. הגורל יכול לעשות כך, שכל הסוללות שנבחרו לא תקינות (הרי מותר לבחור עד  סוללות), ואז באף בדיקה הפנס לא דלק.

נשאר לבדוק, האם יש שיטה שמדליקה פנס ב- בדיקות. אם שיטה כזאת קיימת, נבדקות בה  סוללות, אבל יש רק  סוללות ולכן יש סוללה שנבדקת פעמיים. יתכן שסוללה זאת לא תקינה, וזה כבר מכשיל  בדיקות. כל  הבדיקות האחרות יכולות להיכשל גם, אם יש עוד  סוללות לא תקינות, וזה עלול לקרות כי באמת יש  סוללות לא תקינות. לכן לא קיימת שיטה ב- בדיקות שעובדת בוודאות.

**ב.** נציג שיטה שעובדת ב- בדיקות. בתוך שלישייה של סוללות  נבדוק כל סוללה עם כל סוללה, וכך גם בשלישיה . את כל הסוללות מ-7 והלאה נחלק לזוגות ונבדוק כל זוג בנפרד. זה בדיוק  בדיקות. אם הפנס לא דלק באף בדיקה, אז יש לפחות שתי סוללות לא תקינות מבין , ועוד שתי סוללות לא תקינות מבין , ובנוסף גם מבין  סוללות נוספות יש  סוללות לא תקינות, סה"כ לפחות  סוללות לא תקינות, בניגוד לנתון שיש  סוללות לא תקינות.

נניח שיש שיטה יותר יעילה. עם משתמשים ב- בדיקות או פחות, ברור ש- סוללות לא תקינות עלולות להכשיל את השיטה. אם יש  בדיקות, בהכרח יש סוללה שנבדקת פעמיים. אם סוללה זו לא תקינה, היא יכולה להכשיל שתי בדיקות, ואז  סוללות לא תקינות נוספות עלולות להכשיל את כל הבדיקות האחרות.

נישאר לדון בשיטות שבהן יש  בדיקות. אם יש בשיטה כזאת סוללה שנבדקת 3 פעמים או יותר, סוללה זו יכולה להיות לא תקינה וזה עלול להכשיל כבר 3 בדיקות. נשארות  בדיקות לכל היותר, ואפשר להכשיל את כולן באמצעות  סוללות לא תקינות.

לכן נשאר להתבונן בשיטות, בהן מבצעים  בדיקות, וכל סוללה נבדקת לכל היותר פעמיים. אבל סה"כ הוכנסו לפנס  סוללות, ויש רק  סוללות, לכן יש בדיוק 4 סוללות שנבדקו פעמיים. ניקח סוללה A שנבדקה פעמיים. יחד איתה נבדקו רק 2 סוללות. לכן יש סוללה נוספת B שנבדקה פעמיים אבל לא נבדקה יחד אם A. אם סוללות A ו-B לא תקינות, זה מכשיל כבר 4 בדיקות שונות. בנוסף יש עוד  בדיקות, ויש  סוללות לא תקינות נוספות, שיכולות להכשיל את כל הבדיקות האחרות. לכן שיטה של  בדיקות לא יכולה להדליק פנס.

**הערה למתקדמים.** ניתן לשאול שאלה כללית יותר: בהינתן S סוללות, שמתוכם T סוללות תקינות, מצאו שיטה יעילה ביותר להדליק פנס. השיטה היעילה ביותר היא כזאת: נפצל את כל S הסוללות ל- מחלקות באורך שווה בערך, ובכל מחלקה נבדוק כל סוללה עם כל סוללה. מכיוון שיש מחלקה עם שתי סוללות תקינות, באחת הבדיקות הפנס ידלוק.

זה ניסוח שקול למשפט טורן. שיטת בדיקה היא גרף, כאשר סוללות הן קודקודי הגרף, ובדיקות הן קשתות הגרף. שיטה עובדת, עם גרף משלים לא מכיל קליקה (תת-גרף מלא) בגודל T. אנחנו מעוניינים למצוא גרף, בו הגרף המשלים לא מכיל T-קליקות, ויחד עם זאת יש בגרף המשלים כמה שיותר קשתות (על מנת שיהיו כמה שפחות בדיקות).