**7.** על כוכב לכת כדורי עם קו משווה בעל היקף 1 מתכננים להניח  מסילות רכבת, שכל אחת מהן תהיה בצורת מעגל שהיקפו 1. לאחר מכן, לאורך כל מסילה תפעלנה מספר רכבות. כל הרכבות תיסענה באותה מהירות חיובית וקבועה מבלי לעצור ומבלי להתנגש. מהו האורך הכולל המקסימלי האפשרי של כל הרכבות? (הרכבות הן קשתות בעלות עובי זניח, ללא נקודות קצה.)

א. כאשר  שווה 3.

ב. כאשר  שווה 4.

תשובות. א. . ב. 2.

**פתרון.** אנחנו נניח שמהירות של כל רכבת היא 1 (ואם לא, ניתן לשנות יחידות מדידה של זמן). ניקח צומת שבה נפגשים שני קווים מעגליים. נניח שמעגל אחד סכום אורכי הרכבות X, ובמעג לאחר סכום אורכי הרכבות Y. אז בצומת במהלך כל קטע זמן במשך 1, הרכבות של מעגל ראשון יטפסו את הצומת זמן X בסה"כ, והרכבות של מעגל שני יטפסו את הצומת זמן Y, אבל רק כאשר אין שם רכבות של מעגל ראשון. לכן בהכרח .

לכן אם יש 3 מעגלים, ואורך כולל של רכבות במעגל אחד הוא , במעגל שני הוא , ובמעגל שלישי הוא , אז מתקיימים אי-השוויונים , , . כשמחברים את 3 אי‑השוויונים האלה ומחלקים ב-2, רואים שהאורך הכולל של כל הרכבות הוא  לכל היותר.

אם יש 4 רכבות, ואורכים של הרכבות במעגלים נפרדים הם  אז גם  וגם , לכן  ולכן אורך הכולל בסעיף ב' הוא 2 לכל היותר.

כמובן, על מנת להגיע לחסמים האלה צריך תכנון ותזמון מדויק. מאי-השוויונים שכתבנו ניתן להבין, שבכל מעגל סכום אורכי הרכבות צריך להיות שווה ל-.

כמובן כל דוגמה שמתאימה לסעיף ב' תתאים גם לסעיף א, מספיק למחוק את אחד מבין 4 המסלולים.

אנחנו נדגים דוגמה שבה יש 4 רכבות, רכבת אחת בכל מעגל, ואורך של כל רכבת שווה ל-.

ניקח מישור כלשהו שחותך את הקליפה כדור במעגל, ולא עובר דרך מרכז הכדור O. במעגל זה נחסום ריבוע ABCD. נקודות A, B, C ו-D יהפכו לצמתים, ומסילות הרכבת הם מעגלי החיתוך של הקליפה הכדורית עם המישורים OAB, OBC, OCD ו-ODA. המעגלים שהתקבלו מהמישורים OAB ו-OCD נחתכים בנקודות X ו-X', ומעגלים שנוצרים מהמישורים OBC ו-OAD נחתכים בנקודות Y ו-Y'. נקודות סימטריות ל-A, B, C, D ביחס למרכז הכדור O הן A', B', C', D' בהתאמה (בציור לא רואים את הקודקודים האלה כי הם מאחרי הכדור). הנקודות A, B, C, D, X, Y והנקודות ההפוכות A', B', C', D', X', Y' אלה כל הצמתים שיש ברשת.

ברגע התחלתי שמצויר בציור קטר הרכבת האדומה (שאוכה חצי) נכנס לצומת B מהכיוון של צומת C, וקטר רכבת כתומה נכנסת לצומת D מהכיוון של צומת A. זנב הרכבת ירוקה בדיוק ברגע זה יוצא מצומת B בכיוון ההפוך לכיוון של צומת A, וזנב הרכבת הכחולה יוצא מצומת D בכיוון שמתרחק מצומת C.

אנו רואים, שרכבת אדומה וירוקה בחיים לא מתנגשות, כי בדיוק כאש רכבת אדומה נכנסת לצומת B רכבת ירוקה יוצאת משם, וכעבור זמן חצי אותו דבר קורה בצד השני של הכדור, בצומת B'. בדיוק מאותה סיבה גם רכבת כתומה וכחולה לא מתנקשות אף פעם.

רואים גם שבדיוק הזמן שייקח לפנות את צומת Y זה בדיוק אותו הזמן שייקח לרכבת כתומה להגיע לשם, כי התמונה סימטרית ו-CYD שווה-שוקיים. אם כך, אז גם כאשר רכבת כתומה תגיע ל- כעבור זמן  רכבת אדומה בדיוק תצא משם. לכן רכבת אדומה וכתומה לא מתנגשות אף פעם.

בדיוק מאותה סיבה גם רכבות ירוקה וכחולה לא מתנקשות.

יהיה  אורך הקשת BA, ששווה גם לאורך הקשת AD. אם נחזיר את הזמן אחורה יחסית לתמונה ב- (או מכיוון שאמרנו שזה הרגע התחלתי נתקדם בזמן , אבל מבחינת תנועה מחזורית זה אותו דבר), נראה שרכבת כתומה נכנסת לצומת A בדיוק כאשר רכבת ירוקה יוצאת מ-A, לכן הרכבות לא מתנגדות ב-A, ו כעבור זמן  אותו דבר יתרחש ב-.

באותם רגעים, דבר דומה יקרה בצמתים C ו-C' עם רקבת אדומה ורכבת כחולה.

ובכן, עברנו על כל הצמתים ועל כל זוגות של רכבות, וראינו שאף פעם אין התנגשות בדוגמה שלנו.