**6.** פלינדרום הוא מילה שהיא אותו דבר כאשר קוראים אותה מההתחלה או מהסוף.

א. יוצרים מילה לפי הכלל הבא: מתחילים מהמילה הריקה ובכל שלב ניתן להכניס למילה הנוכחית את אחת המילים  בין שתי אותיות סמוכות, או בהתחלה, או בסוף. האם ניתן באופן זה לקבל פלינדרום?

ב. מבצעים את אותו התהליך, אבל מותר להשתמש גם במילים . מהלך נקרא מסוג ראשון אם מכניסים את אחת המילים , ומסוג שני אחרת. בסוף התהליך התקבל פלינדרום. האם כמות המהלכים מסוג ראשון בהכרח שווה לכמות המהלכים מסוג שני?

תשובות. א. לא. ב. כן.

**פתרון ראשון.** נתבונן בכל הזוגות של אותיות שונות שיש בשורה, ***לאו דווקא של אותיות סמוכות***. אם בזוג כזה יש  משמאל ל-, או  משמאל ל-, או  משמאל ל-, נגיד שזה זוג מסודר, ואם יש בזוג  מימין ל-, או  מימין ל-, או  מימין ל-, נגיד שזה זוג הפוך. נגדיר מדד D ששווה להפרש בין כמות הזוגות המסודרים פחות כמות הזוגות ההפוכים.

בכל מהלך מסוג ראשון, כאשר אנחנו מוסיפים את אחת המילים , אנחנו מוסיפים שני זוגות מסודרים וזוג הפוך. בנוסף, כל אות שכבר הייתה במילה יותרת 3 זוגות חדשים אם האותיות שנוספו, שאחת מהן לא נחשב (כי זו אותה אות), השני מסודר והשלישי הפוך. לכן בכל מהלך מסוג ראשון D גודל ב-1. באופן דומה, קל לראות שבכל מהלך מסוג שני D מוקטן ב-1.

קל לראות שבפלינדרום D מתאפס, הרי לכל זוג יש את הזוג הסימטרי לו, ואם זוג אחד מסודר אז השני הפוך ולהפך, לכן יש אותה כמות של זוגות מסודרים והפוכים. לכן אם עושים אותה כמות של מהלכים מסודרים והפוכים נקבל שהייתה אותה כמות של מהלכים מסוג ראשון ומסוג שני.

**פתרון שני** (למתקדמים)**.** נבחר 3 ווקטורים במישור, שאורכים שלהם שווים והזוויות בין כל שניים היא . ניתן לווקטורים האלה שמות ,  ו- נגד כיוון השעון. כעת לכל מילה שמורכבת מהאותיות ,  ו- נוכל להתאים מצולע מכוון: נתחיל לצייר אותו מנקודה O, וכאשר מקריאים את המילה משמאל לימין נצייר ווקטור שאת שמו מקריאים שמתחיל בנקודה שעצרנו בה. כמובן שאם יש במילה אותה כמות של אותיות מכל סוג, אז אנחנו נחזור בסוף לנקודה O מכיוון ש-.

מילה ריקה מתאימה למצולע נקודתי, וכאשר מכניסים תת-מילה כמו בניסוח השאלה אז מוסיפים משולש למצולע. שטח מכוון עולה ב- עם כל מהלך מסוג ראשון, ומוקטן ב- עם כל מהלך מסוג שני. נשאר להראות, שאם המילה היא פלינדרום, אז שטח המכוון המתאים הוא 0.

פלינדרום, זה כאשר אם הולכים על המצולע מההתחלה או מהסוף, עושים אותם מהלכים רק בכיוון הפוך. לכן לפי הנוסחה לשטח מכוון של סכום לפי הצלעות, המחוברים מההתחלה ומהסוף מתקזזים והשטח המכוון יוצא 0 לכל פלינדרום.

**הערה.** בעצם אפשר לראות שאלה שתי הצגות שונות לאותו פתרון, כי עבור השטח המכוון ניתן לכתוב נוסחה באמצעות הווקטורים של הצלעות.