**5.** על הלוח כתובים מספר פולינומים ממעלה 37, שכל מקדמיהם אי-שליליים, והם מתוקנים (כלומר, בכל הפולינומים הכתובים המקדם של  שווה ל-1). בכל שלב ניתן לבחור כל שני פולינומים רשומים  ו- ולהחליפם בשני פולינומים מתוקנים ממעלה 37,  ו-, המקיימים  או . הוכיחו כי לא ייתכן שלאחר מספר סופי של מהלכים לכל הפולינומים על הלוח יהיו 37 שורשים חיוביים שונים.

**פתרון.** נתבונן בשורשים המרוכבים של הפילונומים. נתבונן בסכום כל השורשים של כל הפולינומים אשר רשומים על הלוח בשלב *n* . אנו טוענים כי סכום זה לא ישתנה בתהליך הנתון.

נשים לב כי עבור כל פולינום $p\left(x\right)=x^{m}+a\_{m-1}x^{m-1}+…+a\_{1}x+a\_{0}$*, סכום השורשים הוא* $-a\_{m-1}$*. לכן אם נחבר שני פולינומים מתוקנים* $p\left(x\right), q\left(x\right)$ *בעלי דרגות שוות, אז סכום השורשים של הפולינום* $p\left(x\right)+q(x)$ *הוא*

*(סכום השורשים של* $p\left(x\right)$*) + (סכום השורשים של* $q\left(x\right)$*)*

*עכשיו נתבונן בפעולת החלפה של זוג פולינומים* $f\left(x\right), g\left(x\right)$ *שכתובים על הלוח בזוג* $f\_{1}\left(x\right), g\_{1}\left(x\right)$ כך שמתקיים: $f\left(x\right)+g\left(x\right)=f\_{1}\left(x\right)+g\_{1}\left(x\right)$. עפ"י השיקול הנ"ל, פעולה זו לא תשנה את הסכום הכולל של כל שורשי הפולינומים על הלוח.

מצד שני, נתבונן בפעולת ההחלפה *של זוג פולינומים* $f\left(x\right), g\left(x\right)$ *שכתובים על הלוח בזוג* $f\_{1}\left(x\right), g\_{1}\left(x\right)$ כך שמתקיים: $f\left(x\right)g\left(x\right)=f\_{1}\left(x\right)g\_{1}\left(x\right)$.

טענת עזר: פעולה זו לא משנה את אוסף השורשים הכולל.

הסבר: כל שורש של אחד הפולינומים $f\left(x\right), g\left(x\right)$ יהיה גם שורש של המכפלה $f\left(x\right)g\left(x\right)$, וסכום הריבויים שלו בפולינומים $f\left(x\right), g\left(x\right) $ יהיה שווה לריבוי שלו ב-$ f\left(x\right)g\left(x\right)$. לכן כל שורש של אחד הפולינומים $f\left(x\right), g\left(x\right)$ יהיה גם שורש של (לפחות) אחד מהפולינומים $f\_{1}\left(x\right),g\_{1}\left(x\right)$, וריבוי הכולל שלו בזוג הראשון יהיה שווה לריבוי הכולל שלו בזוג השני.

מכאן שגם הפעולה השנייה גם כן לא משנה את הסכום הכולל של כל שורשי הפולינומים על הלוח.

בהתחלה כל המקדמים של כל הפולינומים היו חיוביים, לכן סכום השורשים של כל הפולינומים היה שלילי, ויישאר שלילי. לכן לא ייתכן כי בשלב מסוים כל השורשים יהיו חיוביים. מש"ל