**4.** בממלכה 64 ערים. חלק מהערים מחוברות בכביש, אך לא ידוע אילו בדיוק. על כל זוג ערים ניתן לשאול אם קיים ביניהן כביש. ברצוננו לגלות האם ניתן להגיע מכל עיר לכל עיר אחרת באמצעות הכבישים. הוכיחו כי לא ניתן לעשות זאת בפחות מ-2016 שאלות.

**פתרון.** ראשית, נשים לב ש$\left(\genfrac{}{}{0pt}{}{64}{2}\right)=2016$ כלומר בעצם צריך להוכיח שקיים מקרה בו נצטרך לשאול על כל הכבישים האפשריים בממלכה כדי לדעת אם ניתן להגיע מכל עיר לכל עיר.

לשם כך, נעזר בגישה החמדנית ([אלגוריתם חמדן](https://he.wikipedia.org/wiki/%D7%90%D7%9C%D7%92%D7%95%D7%A8%D7%99%D7%AA%D7%9D_%D7%97%D7%9E%D7%93%D7%9F)).

נאמר שהמדינה "כמעט קשירה" אחרי מספר שאלות אם כאשר נוסיף את כל הכבישים שעוד לא נשאלנו עליהם ניתן יהיה להגיע מכל עיר לכל עיר.

נשים לב, שאנחנו צריכים להשאיר בתשובות שלנו את המדינה "כמעט קשירה", אחרת השואל יוכל לדעת בפחות שאלות שלא ניתן להגיע מכל עיר לכל עיר.

האסטרטגיה שלנו היא כזו: נאמר "לא" כל עוד התשובה שלנו משאירה את המדינה "כמעט קשירה".

בברור, על פי ההגדרה שלנו אחרי שנשאל על הכביש האחרון ניתן יהיה להגיע מכל עיר לכל עיר ולכן כדי להוכיח את הטענה בשאלה צריך להראות שבכל שלב באמצע עדיין לא ניתן להגיע מכל עיר לכל עיר (וזה כמובן יישאר כך אם נגיד מעתה "לא" על כל השאלות).

נאמר שבשלב מסוים כביש הוא "מיותר" אם קיים מסלול מכבישים שאנחנו כבר יודעים שקיימים בין הערים של הכביש.

נשים לב שמספיק שנוכיח שבשום שלב אין כבישים מיותרים, מכיוון שברגע שניתן להגיע מכל עיר לכל עיר כל הכבישים שעוד לא נשאלנו עליהם מיותרים ועל פי ההנחה שלנו אין כאלה.

נניח בשלילה שבשלב מסוים כביש הופך להיות מיותר, כלומר הוספנו כביש א' וכביש ב' הפך להיות מיותר. זה אומר שקיים מסלול המחבר את ערי כבישי ב' שעובר דרך כביש א' וכבישים שכבר קיימים במדינה ולכן אם נוסיף את כביש ב' למסלול הזה נקבל מעגל שעובר גם בכביש א' וגם בכביש ב' ולכן אם נסיר כעת את כביש א' נקבל מסלול בין ערי כבישי א' שמורכב רק מכבישים שכבר יש לנו ומכביש ב' ולכן אם במקום להוסיף את כביש א' היינו מוסיפים את כביש ב', עדיין היה ניתן להגיע מכל עיר לכל עיר פשוט על ידי החלפת כביש א' בעיקוף שבנינו ולכן אם היינו אומרים "לא" על כביש א' המדינה הייתה נשארת "כמעט קשירה", בסתירה לכך שאמרנו "כן" על הכביש.

**הערה:** ניתן להוכיח זאת גם על ידי האפיון שכל כביש שעדיין לא שאלו עליו יכול להוריד את מספר רכיבי הקשירות באחד. הפתרון שהצגנו הוא לא פתרון יחיד, ישנם פתרונות רבים נוספים עם שיטות שונות מהותית.