**7.** למרדכי יש ממתקים מ-*n* סוגים שונים, *k* ממתקים מכל סוג. הוא חילק את הממתקים ל-*k* משלוחי‑מנות המכילים n ממתקים כל אחד, וחילק את משלוחי-המנות ל-*k* ילדים. הילדים החליטו לחלק את הממתקים מחדש בצורה הוגנת. שני ילדים יסכימו להחליף ממתק בממתק אם כל אחד יקבל ממתק שאין לו. האם תמיד ניתן לארגן סדרת החלפות כך שבסופן לכל ילד יהיו ממתקים מכל הסוגים?

**פתרון.** נסמן ב-$a\_{i}$ את מספר סוגי הממתקים שיש לילד *i* (לכל *i* בין 1 ל-k). אז$a\_{i} $ הוא מספר שלם בין 1 ל-*n*, ואנו רוצים להגיע למצב בו $a\_{i}=n$ לכל *i*. נתבונן בביטוי $B=a\_{1}+a\_{2}+…+a\_{k}$ (סכום כמויות הסוגים השונים של ממתקים שיש לכל ילד). אנו נגיע למצב הרצוי כאשר *B* יהיה שווה ל- *nk*, וזהו הערך המקסימלי ש-*B* יכול לקבל. כלומר, אנו רוצים להגדיל כמה שאפשר את*B* .

נניח כי עוד לא הגענו למצב הרצוי (אחרת סיימנו).

נחליט מראש שבכל שלב אנו יכולים להתעלם מכל הילדים שיש להם את כל סוגי הממתקים (הם "מסודרים"). נתאר פעולה שמגדילה את *B* ב-1: נבחר ילד (נקרא לו ילד מספר *i*) שיש לו הכי הרבה סוגי ממתקים (אבל לא כל הסוגים!). כלומר, עבור ילד זה $a\_{i}<n$ ו-$a\_{i}$ מקסימלי מבין כאלו.

יהיא S סוג ממתק כך שהסוג הזה חסר לילד *i*. אז אצל *k*-1 ילדים אחרים יש *k* ממתקים מסוג S, לכן לפי עקרון שובך היונים קיים ילד *j*שאצלו יש לפחות 2 ממתקים מהסוג S. כמובן שילד *j* כזה אינו "מסודר" – הרי לילד "מסודר" יש בדיוק ממתק אחד מכל סוג.

לכן לילד *j* חסר סוג ממתק כלשהו. אנו טוענים שהוא יכול להתחלף עם ילד *i* – לתת ל-*i* את הסוג החסר ל-*i* ולבקש ממתק אחר שחסר לו.

מדוע זה אפשרי? נניח בשלילה כי הם לא יכולים להתחלף. אז קבוצת הסוגים שיש ל-*j* מכילה ממש (כלומר, לא שווה) לקבוצת הסוגים שיש ל-*i*. אבל אמרנו של-*i* יש הכי הרבה סוגים מבין כל הילדים הלא-"מסודרים"! סתירה.

לכן הילדים *i* ו-*j* יכולים להתחלף, כאשר *j* נותן ל-*i* ממתק מסוג שחסר ל-*i* אבל שלא יהיה חסר ל-*j* גם לאחר ההחלפה (כי ל-*j* היו קודם לפחות שני ממתקים מסוג זה!).

מכאן שכתוצאה מפעולה זו הערך $a\_{i}$ אינו קטן, הערך $a\_{j}$ גדל, ושאר ערכי $a\_{1},a\_{2},…,a\_{k}$ אינם משתנים. לכן *B* גדל.