**5.** במשולש ABC התיכונים AA0, BB0 ו-CC0 נפגשים בנקודה M. הוכיחו כי מרכזי המעגלים החוסמים את המשולשים MA0B0, MCB0, MA0C0, MBC0 והנקודה M נמצאים על מעגל אחד.

**פתרון.** נבצע הומותטיה פי 2 עם מרכז ב-M, ונסמן את הנקודות אליהן עוברים מרכזי המעגלים החוסמים של MA0B0 , MCB0, MA0C0 , MBC0 ב-D, E, F, G בהתאמה, אשר נמצאות על המעגלים החוסמים המתאימים. די להוכיח כי חמש הנקודות MDEFG נמצאות על מעגל אחד. אנו נראה כי המרובע MDEF חסום במעגל, וניווכח כי משיקולים זהים (אחרי החלפה בין B ל-C) ינבע שגם MDFG חסום במעגל, כלומר כל חמש הנקודות נמצאות על המעגל החוסם של MDF, כפי שרצינו.

תהא X אחת מהנקודות $A\_{0},B\_{0},C\_{0},B,C$. נסמן ב-$L\_{X}$ את האנך ל-$MX$ העובר דרך X (למשל, $L\_{A\_{0}}$ יסמן את האנך ל-$MA\_{0}$ העובר דרך $A\_{0}$).

נשים לב, שעל פי הגדרתן, הנקודות D, E, F, G נמצאות על החיתוכים

$L\_{A\_{0}}∩L\_{B\_{0}}$, $L\_{C}∩L\_{B\_{0}}$, $L\_{A\_{0}}∩L\_{C\_{0}}$, $L\_{B}∩L\_{C\_{0}}$, .

בהתאמה. נזכיר כי זווית מכוונת $∢\left(L\_{1},L\_{2}\right)$ זו זווית בה צריך לסובב את הישר $L\_{1}$ נגד כיוון השעון על מנת שיהיה מקביל לישר $L\_{2}$. זוויות מכוונות מוגדרות עד כדי תוספת של כפולה של . חישוב בזוויוצ מכוונות הרבה פעמים חוסך בדיקת מקרים, למשל כאשר בודקים האם 4 נקודות נמצאות על מעגל אחד. כעת נחשב זוויות מכוונות.

$∢EDF= ∢\left(ED,DF\right)=∢\left(L\_{B\_{0}},L\_{A\_{0}}\right)= ∢(B\_{0}M,MA\_{0})$..

על מנת להוכיח ש-MEDF חסום במעגל, די להוכיח שזווית זו שווה ל- $∢EMF= ∢(EM,MF)$. זה שקול לכך ש-$∢\left(EM,MB\_{0}\right)=∢\left(FM,MA\_{0}\right)$. נזכר שהמרובעים EMB0C, FMA0C0 חסומים במעגל, ולכן זה שקול ל- $∢\left(EC,CB\_{0}\right)=∢(FC\_{0},C\_{0}A\_{0})$. אולם הזהות האחרונה ברורה לגמרי, שכן $C\_{0}A\_{0}∥CB\_{0}B$ (קטע אמצעים במשולש ABC), וכן $EC=L\_{C}∥L\_{C\_{0}}=FC\_{0}$ שכן שני הישרים מאונכים ל-$CMC\_{0}$, וזוויות מכוונות בין זוגות ישרים מקבילים שוות.