**5.** על הלוח כתובים מספרים ממשיים שונים. שמעון רוצה לכתוב ביטוי שייתן את כל המספרים המופיעים על הלוח, ורק אותם. לשם כך, מותר לו לכתוב כל מספר ממשי שירצה, את הסימן המיוחד ±, את הסימנים הרגילים + , – , × וסוגריים. בחישוב הביטוי, בכל מקום בו מופיע הסימן ± הוא יחושב גם כ + וגם כ –, בכל קומבינציה אפשרית. למשל, אם על הלוח כתובים המספרים 4,6 שמעון יוכל לכתוב 5±1 , ואם על הלוח כתובים המספרים 1,2,3 שמעון יוכל לכתוב (2±0.5)±0.5. האם שמעון תמיד יכול לכתוב ביטוי כזה אם על הלוח כתובים:

א. המספרים 1,2,4.

ב. 100 מספרים ממשיים שונים כלשהם.

**תשובה.** כן.

**פתרון. א.** כן, ניתן. למשל,

**ב.** נוכיח כי ניתן לעשות זאת עבור כל n מספרים ממשיים שונים. נוכיח באינדוקציה על פי n: הבסיס n=1 הוא ברור.

צעד האינדוקציה: ניקח את המספר הכי קטן (נקרא לו *a*), ונחסיר אותו מכל המספרים האחרים. קיבלנו n-1 מספרים ממשיים שונים (ואף חיוביים). נכתוב ביטוי כנ"ל עבור n-1 המספרים האלו, ונסמן ביוטי זה ב-*E*. אז נכתוב ביטוי . הביטוי החדש ייתן לנו בדיוק את n המספרים הנדרשים.