**2.** נתון ריבוע 10×10 המצויר על דף משבצות. בתוך הריבוע סומנו 80 קטעי יחידה על גבי קווי הרשת של הדף, וכתוצאה מכך הוא חולק ל-20 מצולעים שווי שטח. הוכיחו כי כל המצולעים הללו חופפים.

**פתרון.** נחשב את השטח של כל צורה: כל הצורות שוות שטח, יש 20 צורות, וסכום השטחים הוא $10×10=100$. מכאן שלכל צורה יש שטח 5. נחשב גם את ההיקף הממוצע של הצורות.

היקף ממוצע של צורה = (סכום ההיקפים של כל הצורות) × $\frac{1}{20}$

נחשב עכשיו את סכום ההיקפים של כל הצורות. כל קטע על היקף הריבוע מופיע רק בצורה אחת, ולכן תורם 1 לסכום. ואילו כל קטע מסומן בפנים הריבוע מופיע בשתי צורות, ולכן תורם שתיים לסכום ההיקפים.

מכאן נקבל:

סכום ההיקפים של כל הצורות = 4·2+10·80 = 200.

לכן

היקף ממוצע של צורה = 10

אנו טוענים כי 10 הוא ההיקף המינימלי שיכול להיות לצורה בת 5 משבצות, ויש רק צורה אחת כזו (המורכבת מ-5 משבצות ובעלת היקף 10). ניתן לנחש את הצורה ולבדוק זאת ישירות, או להשתמש בטענת עזר הבאה:

טענת עזר: ניקח צורת משבצות כלשהי, ונתבונן במלבן (מצויר לפי קווי רשת) שמכיל את הצורה הנתונה ובעל השטח הכי קטן. אנו טוענים כי היקף הצורה גדול או שווה להיקף המלבן.

הסבר: אכן, אם בין הגבול הימני ביותר לגבול שמאלי ביותר של צורה יש  משבצות, אז חייבים להיות לפחות  גבולות של משבצות שמקבילים אותה מלמעלה ולפחות  מלמטה. כמו כן, אם בין הגבול אופקי הנמוך ביותר והגבול אופקי הגבוהה ביותר יש  משבצות, חייבים להיות לפחות  גבולות שמאליים ו- גבולות ימניים לצורה. לכן היקף הצורה הוא לפחות  שזה היקף של המלבן.

אם היקף של מלבן הוא 10 אז זה מלבן 2×3 או 1×4, ואז שטחו 6 או 4. אם היקף המלבן יותר קטן, הוא עוד יותר קטן. לכן מלבן יחיד שהיקפו 10 או פחות שמכיל 5 משבצות הוא מלבן 2×3. על מנת לקבל צורה שמוכלת במלבן כזה, מורכבת מ-5 משבצות והיקפה 10, חייבים להוריד מהמלבן את אחת המשבצות הפינתיות (הרי כאשר מורידים משבצת לא פינתית היקף יוצא יותר גדול). לכן כל הצורות בחלוקה חופפות לצורה שבציור.

**הערה.** לא קשה לבנות חלוקה של לוח  לצורות כאלו.